**CONCOURS DE RECRUTEMENT AU PROFESSORAT DE L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRÉ AGRICOLE** **C A P E S A**

**CONCOURS D'ACCÈS à la 2e catégorie des emplois de professeurs des établissements d'enseignement agricole privés**

**SESSION 2013**

Concours : EXTERNE
Section : **MATHÉMATIQUES**

## PREMIÈRE ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ

# Culture disciplinaire

*(Coefficient 2 : - Durée : 5 heures)*

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*L'usage des calculatrices de poche est autorisé, à condition qu'elles soient à fonctionnement autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.*

*Le sujet comporte sept pages.*

Les différentes parties peuvent être traitées de manière indépendante, toutefois, les résultats de la première question de la partie 1 pourront être réinvestis dans les deux autres parties.

## Notations

Dans la suite, $K$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ . On note pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1 :
$\mathcal{S}_n(K)$ l'ensemble des suites numériques à valeurs dans $K$.
$\mathcal{M}_n(K)$ l'ensemble des matrices carrées à coefficients dans $K$ .
$\mathcal{M}_{n,p}(K)$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $K$ à $n$ lignes et $p$ colonnes ($p$ entier naturel non nul) .

$I_n$ désigne la matrice unité et $0_{\mathcal{M}_n(K)}$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(K)$ .
$0_{\mathcal{M}_{n,p}(K)}$ désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ .
Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Si $A$ est inversible, on note $A^{-1}$ son inverse.

## Rappels, prérequis

Si $A \in \mathcal{M}_n(K), A^0 = I_n$.
$A \in \mathcal{M}_n(K)$ est nilpotente si il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0_{\mathcal{M}_n(K)}$.

Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et telle que $X(\Omega)$ soit un ensemble infini dénombrable que l'on notera $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$.

- On dit que $X$ admet une espérance mathématique, que l'on note $E(X)$ si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente et on a alors : $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$.
- Soit $f$ une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.
  La variable aléatoire $f(X)$ admet une espérance si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(x_n)P(X = x_n)$ est absolument convergente et on a alors : $E(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)P(X = x_n)$.
- $X$ possède une variance, notée $V(X)$, si et seulement si $X^2$ possède une espérance et dans ce cas $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$. (formule de Huygens).

## Partie 1 : suites numériques géométriques

Dans $\mathcal{S}_n(K)$, on appelle suite géométrique de raison $q$ appartenant à $K$, toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n$.

1. Résultats de base

   On considère la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}_n(K)$ de premier terme $u_0$ donné et de raison $q$ non nulle.

a. Expression du terme général en fonction de $n$

Démontrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}, u_n = u_0 q^n$, puis en déduire, pour $n$ et $p$ dans $\mathbb{N}, u_n$ en fonction de $u_p$ et de $q$.

b. Somme de termes consécutifs

**(i)** Démontrer que pour tout couple $(a, b)$ de $K^2$, et pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$,

$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$ (formule de l'identité géométrique)

**(ii)** En déduire que, lorsque $q \neq 1$, pour $n$ et $p$ dans $\mathbb{N}, p < n$, $\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

**(iii)** Exprimer $\sum_{k=p}^{n} u_k$ en fonction de $n, p$ et $u_p$ dans le cas où $q = 1$.

c. Limite de $(q^n), q \in \mathbb{R}$

**(i)** Soit $q \in ]1, +\infty[$, on pose $q = 1 + a$.

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geq na$ puis en déduire $\lim_{n\to+\infty} q^n$.

**(ii)** Soit $q \in ]-1, 1[$.

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, -|q|^n \leq q^n \leq |q|^n$ puis, à l'aide de la question précédente, en déduire $\lim_{n\to+\infty} q^n$.

**(iii)** Justifier que si $q \leq -1$, $\lim_{n\to+\infty} q^n$ n'existe pas.

**(iv)** Dresser un tableau donnant $\lim_{n\to+\infty} q^n$, selon la valeur du réel $q$.

2. Une application : écriture fractionnaire d'un nombre rationnel connu par son développement décimal périodique

Pour tout nombre réel $x$, on appelle développement décimal illimité de $x$ toute suite $(d_n)$ de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que :

- $d_0 \in \mathbb{Z}$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, d_n \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$
- $x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{10^k}$

On écrit alors $x = d_0, d_1 d_2 ... d_n ...$

Si $x$ est un nombre rationnel, alors la suite $(d_n)$ est périodique à partir d'un certain rang. Dans ce cas, on peut utiliser une notation simplifiée.

Par exemple, $2,34137137137...$ se note $2,34\underline{137}$ (on souligne ce qui se répète).

L'objectif est, connaissant le développement décimal d'un nombre rationnel $x$, de retrouver une écriture fractionnaire de celui-ci.

a. Exemple 1 : soit $x = 4,\underline{37}$

On pose, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, $x_n = 4 + \sum_{k=1}^{n} \frac{37}{10^{2k}}$.

Etablir un lien entre $x$ et $x_n$, puis en déduire une forme fractionnaire de $x$.

b. Exemple 2 : soit $y = 1,0\underline{342}$. Déterminer une forme fractionnaire de $y$.

c. Exemple 3 : soit $z = 0,\underline{9}$. Déterminer une forme fractionnaire de $z$. Quelle remarque ce dernier exemple vous inspire-t-il ?

3. Suites arithmético-géométriques

On appelle suite arithmético-géométrique, toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}_n(K)$ telle que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n + r$, avec $q$ et $r$ dans $K, q \neq 1, r \neq 0$.

a. Expression du terme général en fonction de $n$

On reprend les notations de la définition précédente.

**(i)** Déterminer le réel $L$ tel que $L = qL + r$.

**(ii)** Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - L$. Démontrer que $(v_n)$ est une suite géométrique. Préciser sa raison.

**(iii)** Donner l'expression de $v_n$ puis de $u_n$ en fonction de $n$.

b. Application

Une machine à sous a été programmée pour fonctionner de la manière suivante :

Un joueur a une chance sur 200 de gagner à son premier essai.

Etant donné un entier naturel non nul $n$,

si ce joueur perd à l'essai $n$, il a une chance sur 100 de gagner à l'essai suivant,

s'il gagne à l'essai $n$, il a une chance sur 1000 de gagner à nouveau à l'essai suivant.

On définit l'évènement $A_n$ : un joueur donné gagne au $n^{ème}$ essai et on note $u_n$ sa probabilité.

**(i)** Décrire l'espace probabilisé.

**(ii)** Démontrer que, pour tout entier naturel non nul, $u_{n+1} = -\dfrac{9}{1000}u_n + \dfrac{1}{100}$.

**(iii)** En déduire, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

**(iv)** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$ puis en donner une interpétation.

## Partie 2 : suites matricielles

Dans $\mathcal{M}_{n,1}(K)$, on appelle suite matricielle géométrique de raison matricielle $A$ appartenant à $\mathcal{M}_n(K)$, toute suite de matrices $(U_n)$ telle que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}, U_{n+1} = AU_n$.

1. Résultats généraux

a. Soient $A, B$ et $P$, trois éléments de $\mathcal{M}_n(K)$, avec $P$ inversible, telles que $A = PBP^{-1}$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, A^n = PB^nP^{-1}$.

b. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(IK)$.

A quelle condition $M$ est-elle inversible ? Dans le cas où $M$ est inversible, exprimer son inverse en fonction de $a, b, c$ et $d$.

2. Résultats de base

On considère la suite matricielle géométrique $(U_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ de premier terme $U_0$ donné et de raison $A$ appartenant à $\mathcal{M}_n(K)$.

a. Expression du terme général en fonction de $n$

Exprimer,pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $U_n$ en fonction de $U_0$ et de $A$.

b. Somme de termes consécutifs

**(i)** Démontrer que pour toute matrice $A$ de $\mathcal{M}_n(K)$, et pour tout $p$ de $\mathbb{N}^*$,

$I_n - A^{p+1} = (I_n - A)\sum_{k=0}^{p} A^k$

**(ii)** On suppose que $I_n - A$ est inversible, en déduire une nouvelle expression de $\sum_{k=0}^{p} A^k$, puis exprimer $\sum_{k=0}^{p} U_k$ en fonction de $I_n, A, p$ et $U_0$.

3. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

On appelle suite récurrente linéaire d'ordre 2, toute suite $(u_n)$ de $\mathcal{S}_n(K)$ telle qu'il existe deux éléments $a$ et $b$ de $K$ $(b \neq 0)$ tels que pour tout entier $n$ , $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

a. Ecrire un algorihtme permettant de calculer $u_n$, pour $n \geq 2$, connaissant $a, b, u_0$ et $u_1$.

b. Exemple 1 : soit $(u_n)$ la suite récurrente linéaire d'ordre 2 de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ , définie par : $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ et telle que $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$.

On pose, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

**(i)** Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$.

**(ii)** Déterminer les valeurs propres de $A$ ainsi que les vecteurs propres associés dont la première composante est égale à 1.

**(iii)** En déduire l'existence de deux matrices $P$ et $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avec $P$ inversible de première ligne composée de 1 et $D$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$ .

**(iv)** Déterminer, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, l'expression de $U_n$, puis de $u_n$ en fonction de $n$.

c. Exemple 2 : soit $(v_n)$ la suite récurrente linéaire d'ordre 2 de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ , définie par : $v_{n+2} = 6v_{n+1} - 9v_n$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ et telle que $v_0 = 1$ et $v_1 = 9$.

On pose, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $V_n = \begin{pmatrix} v_n \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$.

**(i)** Déterminer la matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $V_{n+1} = BV_n$.

**(ii)** Montrer que $B$ n'est pas diagonalisable.

**(iii)** Soit $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $Q$ est inversible, puis calculer $T = Q^{-1}BQ$.

**(iv)** Déterminer la matrice $J \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $T = 3I_2 + J$, puis montrer que $J$ est nilpotente d'ordre 2.

**(v)** Calculer $T^n$ pour tout $n$ de $N$.

**(vi)** En déduire, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, l'expression de $V_n$, puis de $v_n$ en fonction de $n$.

4. Suites arithmético-géométriques

On appelle suite matricielle arithmético-géométrique, toute suite de matrices $(U_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ telle que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ :

$U_{n+1} = AU_n + B$, avec $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(K), A \neq I_n, B \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(IK)}$.

a. Expression du terme général en fonction de $n$

On reprend les notations de la définition précédente.

**(i)** Démontrer que si $I_n - A$ est inversible, alors il existe une unique matrice $L \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ telle que $L = AL + B$. Exprimer $L$ en fonction de $B$ et de l'inverse de $I_n - A$.

**(ii)** Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on pose $V_n = U_n - L$. Démontrer que $(V_n)$ est une suite matricielle géométrique dont on précisera la raison.

**(iii)** En déduire l'expression de $V_n$ en fonction de $A^n, U_0$ et $L$.

b. Application

On considère les suites $(u_n), (v_n)$ et $(w_n)$ définies par $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et les relations de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 2v_n - 1 \\ w_{n+1} = v_n + 2w_n - 2 \end{cases}$

On pose, pour tout $n$ de $\mathbb{N}, U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

**(i)** Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_3(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{3,1}(K)$ telles que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n + B$

**(ii)** Déterminer la matrice $L \in \mathcal{M}_{3,1}(K)$ telle que $L = AL + B$.

**(iii)** Démontrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ n2^n & 2^n & 0 \\ n(n-1)2^{n-2} & n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}$

**(iv)** En déduire, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, l'expression de $U_n$, puis de $u_n, v_n$ et $w_n$ en fonction de $n$.

**(v)** Exprimer $\sum_{k=0}^{p} U_k$ en fonction de $I_n, A, B, U_0$ et $C = (I_n - A)^{-1}$

## Partie 3 : série et loi géométriques

1. Séries géométriques

On appelle série géométrique réelle, toute série de terme général $q^n$, avec $q \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et donner $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ dans le cas où $|q| < 1$.

On prend désormais $q$ tel que $|q| < 1$.

(b) Soit $p \in \mathbb{N}$. en remarquant que $n^p |q|^n = n^p \sqrt{|q|}^n \times \sqrt{|q|}^n$, démontrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^p q^n$ est absolument convergente.

(c) En utilisant l'égalité $\sum_{k=0}^{n}(k+1)q^{k+1} = \sum_{k=0}^{n}kq^{k+1} + \sum_{k=0}^{n}q^{k+1}$, démontrer que $\sum_{n=0}^{+\infty}nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}$.

(d) De même, en développant la somme $\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2q^{k+1}$, démontrer que $\sum_{n=0}^{+\infty}n^2q^n = \frac{q(q+1)}{(1-q)^3}$

2. Une fausse série géométrique

Soient $n$ un nombre entier naturel non nul et $f_n$ la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$f_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n}x^k$.

(a) Montrer que pour tout entier naturel non nul $n$ , $f_n(x) = n$ admet une unique solution notée $a_n$ .

(b) Pour tout entier naturel non nul $n$ , comparer $f_n(a_n)$ et $f_n(1)$, puis en déduire que $0 \leq a_n < 1$.

(c) Montrer que la suite $(a_n)$ est strictement croissante, puis en déduire qu'elle converge. On note $L$ sa limite.

(d) On suppose que $L \neq 1$

**(i)** Montrer que pour tout entier naturel non nul $n$, $f_n(a_n) = \frac{1-a_n^{n+1}}{1-a_n}$

**(ii)** En déduire que $\lim_{n\to+\infty}(f_n(a_n)) = \frac{1}{1-L}$

**(iii)** Que peut-on en conclure ?

3. Loi géométrique

Soit $p \in ]0, 1[$ ; on pose $q = 1 - p$.

On dit que la variable aléatoire réelle $X$ définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ suit la loi géométrique de paramètre $p$ si :

$$\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ \text{et} \\ \text{pour tout } k \text{ de } \mathbb{N}^*, P(X = k) = pq^{k-1} \end{cases}$$

(a) Vérifier que l'on a bien défini la loi de probabilité d'une variable discrète.

(b) Démontrer que si $X$ suit la loi géométrique de paramètre $p$, alors $X$ possède une espérance mathématique et une variance que l'on calculera.

(c) Application

En France, pour 378 naissances de filles, on a 396 naissances de garçons.

Dans une maternité, on considère, à partir d'une date donnée, la variable aléatoire $X$ égale au nombre de naissances observées avant la naissance de la première fille.

**(i)** Justifier que $X$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

**(ii)** Déterminer le plus petit entier $n$ tel que $P(X \leq n) \geq 0,99$.

**(iii)** Préciser et interpréter $E(X)$.